

## Funktory zdaniotwórcze:

Nazwa funktora	Oznaczenie	Czytamy
Negacja ( zaprzeczenie ) zdania	$\sim p$	nieprawda , że p
Koniunkcja zdań	$p \wedge q$	p i q
Alternatywa zdań	$p \vee q$	p lub q
Implikacja zdań	$p \Rightarrow q$	jeśli p , to q
Równoważność zdań	$p \Leftrightarrow q$	p wtedy i tylko wtedy gdy q

## 1. LICZBY RZECZYWISTE

### 1.1. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej

a) Każdą liczbę wymierną można przedstawić w postaci dziesiętnej skończonej ( np.  $\frac{3}{4} = 0,75$  )

lub w postaci dziesiętnej nieskończonej okresowej ( np.  $\frac{1}{3} = 0,3333\dots = 0,(3)$  )

b) Każdą liczbę niewymierną można przedstawić w postaci dziesiętnej nieskończonej nieokresowej ( np.  $\sqrt{2} = 1,4142135\dots$  )

### 1.2. Zaokrąglanie ułamków dziesiętnych

Zaokrąglić liczbę dziesiętną, to znaczy zastąpić zerami (odrzuć) pewną liczbę jej cyfr końcowych zgodnie z regułą:

Jeżeli pierwszą z odrzuconych liczb jest:

0, 1, 2, 3, 4 , to ostatnią z cyfr zachowanych pozostawiamy bez zmian;

5, 6, 7, 8, 9 , to ostatnią z cyfr zachowanych zwiększamy o 1, przy czym jeżeli jest nią cyfra 9 , to zastępujemy ją zerem i zwiększamy o 1 poprzednią cyfrę , itd.

### 1.3. Przybliżenia liczb rzeczywistych

a) Błąd przybliżenia

Jeśli liczba  $a_0$  jest przybliżeniem liczby  $a$  , to błędem przybliżenia  $a_0$  liczby  $a$  jest liczba

$$b = a - a_0.$$

Jeśli  $b < 0$  , to  $a_0$  jest przybliżeniem z nadmiarem.

Jeśli  $b > 0$  , to  $a_0$  jest przybliżeniem z niedomiarem.

b) Błąd bezwzględny  $\Delta = |a - a_0|$

c) Błąd względny  $\delta = \frac{|a - a_0|}{|a|}$  lub  $\delta = \frac{|a - a_0|}{|a|} \cdot 100\%$

### 1.4. Podstawowe działania na liczbach

- a) dodawanie      składnik + składnik = suma
- b) odejmowanie    odjemna – odjemnik = różnica
- c) mnożenie       czynnik · czynnik = iloczyn
- d) dzielenie       dzielna : dzielnik = iloraz

1.5. a) Liczba naturalna  $n \neq 0$  jest dzielnikiem liczby naturalnej  $m$  ( oznaczenie  $n/m$  )  $\Leftrightarrow m : n$  jest liczbą naturalną. Liczbę  $m$  nazywamy wtedy wielokrotnością liczby  $n$  .

b) Liczba pierwsza – liczba naturalna, która ma dokładnie dwa dzielniki ( 1 i samą siebie).

Liczba złożona – liczba naturalna większa od 1, która ma więcej niż dwa dzielniki.

0 i 1 nie są liczbami ani pierwszymi , ani złożonymi.

c) NWD – największy wspólny dzielnik

NWW – najmniejsza wspólna wielokrotność

- d) Liczba parzysta – liczba całkowita podzielna przez 2  
Liczba nieparzysta - liczba całkowita, która nie jest podzielna przez 2
- e) Liczbami przeciwnymi nazywamy takie dwie liczby, których suma jest równa 0.  
Liczbę przeciwną do liczby  $a$  oznaczamy przez  $-a$

Liczbami odwrotnymi nazywamy takie dwie liczby, których iloczyn jest równa 1.

Liczbę odwrotną do liczby  $a$  oznaczamy przez  $\frac{1}{a}$

### 1.6. Cechy podzielności liczb

Liczba naturalna jest podzielna przez:

- 2, gdy jej ostatnią cyfrą jest 0, 2, 4, 6 lub 8;  
3, gdy suma jej cyfr dzieli się przez 3;  
4, gdy liczba, wyrażona dwiema ostatnimi jej cyframi, dzieli się przez 4;  
5, gdy jej ostatnią cyfrą jest 0 lub 5;  
6, gdy dzieli się przez 2 i przez 3;  
7, gdy różnica między liczbą wyrażoną kolejnymi trzema ostatnimi cyframi danej liczby a liczbą wyrażoną pozostałymi cyframi tej liczby ( lub odwrotnie ) dzieli się przez 7;  
8, gdy liczba, wyrażona trzema ostatnimi cyframi dzieli się przez 8;  
9, gdy suma jej cyfr dzieli się przez 9;  
10, gdy ostatnią cyfrą jest 0;  
11, gdy różnica sumy jej cyfr stojących na miejscach parzystych i sumy cyfr stojących na miejscach nieparzystych dzieli się przez 11.

### 1.7. Potęgowanie

a) Potęga o wykładniku naturalnym

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

$a^n$  -  $n$  - ta potęga liczby  $a$

$a$  - podstawa potęgi

$n \in \mathbb{N}$  - wykładnik potęgi

$$a^0 = 1; a \neq 0$$

$$a^1 = a$$

$$1^n = 1$$

$$0^n = 0; n \neq 0$$

$0^0$  – nie istnieje

c) Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \text{ gdzie } a \neq 0$$

d) Potęga o wykładniku wymiernym

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ gdzie } n \geq 1, m \in \mathbb{C}$$

e) Prawa działań na potęgach

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$a^n : b^n = (a : b)^n$$

## 1.8. Pierwiastkowanie

### a) Definicja pierwiastka $n$ – tego stopnia

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

$a$  - liczba podpierwiastkowa

$n$  - stopień pierwiastka

$b$  - wynik pierwiastkowania

jeśli  $n$  jest liczbą parzystą, to  $a \geq 0; b \geq 0$

jeśli  $n$  jest liczbą nieparzystą, to  $a, b \in R$

### b) Prawa działań na pierwiastkach

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \text{ gdy } n \text{ jest liczbą nieparzystą} \quad \sqrt[n]{a^n} = |a|, \text{ gdy } n \text{ jest liczbą parzystą}$$

## 1.9. Logarytmowanie

### a) Definicja logarytmu

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

$a > 0; a \neq 1$

$b > 0$

$a$  - podstawa logarytmu

$b$  - liczba logarytmowana

$c$  - wynik logarytmowania

### b) Własności logarytmu

$$\log_{10} x = \log x \quad - \text{logarytm dziesiętny}$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$a^{\log_a x} = x$$

### c) Prawa działań na logarytmach

$$\log_a x + \log_a y = \log_a x \cdot y$$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$$

$$n \log_a x = \log_a x^n$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

### 1.10. Wzory skróconego mnożenia

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{- kwadrat sumy}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{- kwadrat różnicy}$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad \text{- różnica kwadratów}$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \text{- sześcian sumy}$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad \text{- sześcian różnicy}$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad \text{- suma sześciątów}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad \text{- różnica sześciątów}$$

### 1.11. Procenty

Jeden procent (1%) pewnej liczby, to  $\frac{1}{100}$  tej liczby

$$p\% a = \frac{p}{100} a$$

Jeden promil (1‰) pewnej liczby, to  $\frac{1}{1000}$  tej liczby

$$p \text{ ‰ } a = \frac{p}{1000} a$$

Przy obliczeniu procentu danej liczby lub liczby, gdy dany jest jej procent lub jakim procentem jednej liczby jest druga liczba korzystamy ze wzoru:  $p\% a = b$ , gdzie  $p\%$  - stopa procentowa,  $a$  - całość,  $b$  - część procentowa.

Przy wyznaczaniu liczby o  $p\%$  wyższej (niższej) od danej liczby korzystamy ze wzoru  $a + p\% \cdot a = b$  ( $a - p\% \cdot a = b$ ).

### 1.12. Wartość bezwzględna

a) Definicja wartości bezwzględnej

$$|x| = \begin{cases} x \dots \text{gdy} \dots x \geq 0 \\ -x \dots \text{gdy} \dots x < 0 \end{cases}$$

b) Własności wartości bezwzględnej

$$|x| \geq 0$$

$$|x| = |-x|$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

c) Równania z wartością bezwzględną

$$\text{Jeśli } a > 0, \text{ to } |x| = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$$

d) Nierówności z wartością bezwzględną

$$\text{Jeśli } a > 0, \text{ to } |x| < a \Leftrightarrow x < a \wedge x > -a \Leftrightarrow x \in (-a, a)$$

$$\text{Jeśli } a > 0, \text{ to } |x| > a \Leftrightarrow x > a \vee x < -a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$$

### 1.13. Jednostki miary

#### a) Jednostki długości

$$\begin{aligned}1\text{ km} &= 1000\text{ m} \\1\text{ m} &= 10\text{ dm} \\1\text{ dm} &= 10\text{ cm} \\1\text{ cm} &= 10\text{ mm}\end{aligned}$$

#### b) Jednostki powierzchni

$$\begin{aligned}1\text{ ha (hektar)} &= 10000\text{ m}^2 & 1\text{ km}^2 &= 100\text{ ha} \\1\text{ a (ar)} &= 100\text{ m}^2 & 1\text{ ha} &= 100\text{ a} \\1\text{ km}^2 &= 1000000\text{ m}^2 & 1\text{ a} &= 100\text{ m}^2 \\ & & 1\text{ m}^2 &= 100\text{ dm}^2 \\ & & 1\text{ dm}^2 &= 100\text{ cm}^2 \\ & & 1\text{ cm}^2 &= 100\text{ mm}^2\end{aligned}$$

#### c) Jednostki objętości

$$\begin{aligned}1\text{ ml (militr)} &= 1\text{ cm}^3 & 1\text{ m}^3 &= 1000\text{ dm}^3 \\1\text{ l (litr)} &= 1\text{ dm}^3 & 1\text{ dm}^3 &= 1000\text{ cm}^3 \\1\text{ hl (hektolitr)} &= 100\text{ l} & 1\text{ cm}^3 &= 1000\text{ mm}^3\end{aligned}$$

#### d) Jednostki masy

$$\begin{aligned}1\text{ q (kwintal)} &= 100\text{ kg} & 1\text{ t} &= 1000\text{ kg} \\ & & 1\text{ kg} &= 100\text{ dag} \\ & & 1\text{ dag} &= 10\text{ g} \\ & & 1\text{ g} &= 1000\text{ mg}\end{aligned}$$

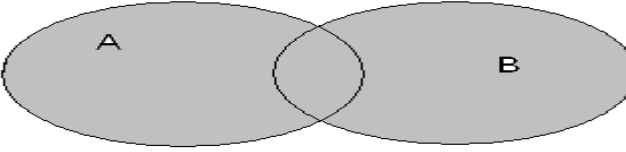
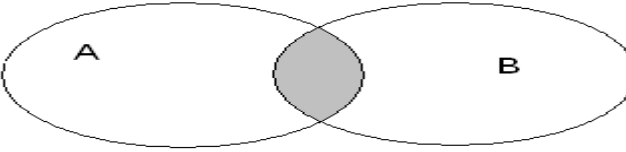
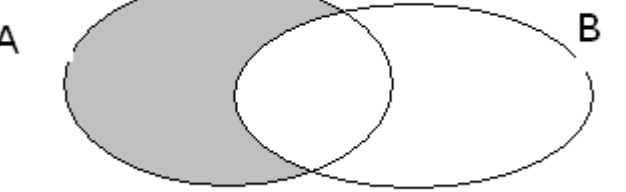
#### e) Jednostki czasu

$$\begin{aligned}1\text{ rok} &= 365\text{ dni (doby)} & 1\text{ rok} &= 365\text{ dni (doby)} \\ &\text{lub } 366\text{ dni – rok przestępny} & 1\text{ doba} &= 24\text{ h} \\ & & 1\text{ h} &= 60\text{ min} \\ & & 1\text{ min} &= 60\text{ s}\end{aligned}$$

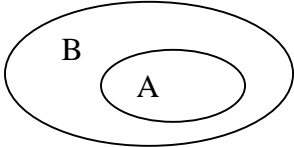

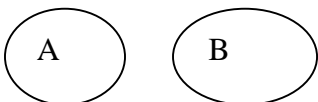
### 1.14. Zbiory

- a) Zbiory oznaczamy dużymi literami: A, B, C,...
- b)  $a \in A$  - czytamy  $a$  należy do zbioru  $A$  ( $a$  jest elementem zbioru  $A$ )  
 $a \notin A$  - czytamy  $a$  nie należy do zbioru  $A$  ( $a$  nie jest elementem zbioru  $A$ )
- c) zbiór skończony – ma skończoną liczbę elementów  
zbiór nieskończony – ma nie skończoną liczbę elementów
- d) zbiór pusty  $\emptyset$  - zbiór, do którego nie należy żaden element
- e) moc zbioru  $\overline{A}$  - liczba elementów zbioru  $A$

### 1.15. Działania na zbiorach

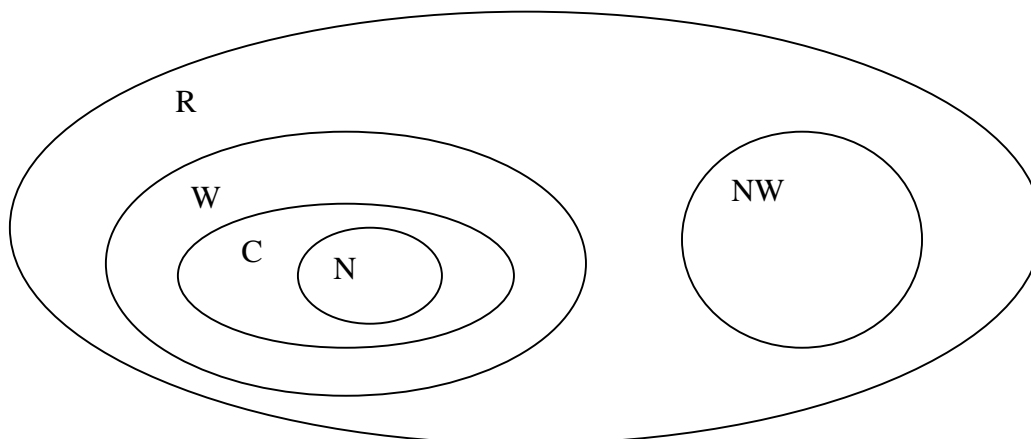
Działanie	Ilustracja graficzna	Zapis symboliczny	Niektóre własności
<u>Suma zbiorów</u> $A \cup B$		$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$	$A \cup \emptyset = A$
<u>Iloczyn zbiorów</u> $A \cap B$		$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
<u>Różnica zbiorów</u> $A \setminus B$		$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$	$\emptyset \setminus A = \emptyset$ $A \setminus \emptyset = A$

### 1.16. Relacje między zbiorami

Relacja	Definicja	Ilustracja graficzna	Zapis symboliczny
<u>Zawieranie się zbiorów</u> $A \subset B$	Zbiór $A$ zawiera się w zbiorze $B \Leftrightarrow$ każdy element zbioru $A$ jest elementem zbioru $B$ (Zbiór $A$ jest <u>podzbiorem</u> zbioru $B$ , a zbiór $B$ jest <u>nadzbiorem</u> zbioru $A$ )  $A \not\subset B$ - $A$ nie zawiera się w $B$		$A \subset B \Leftrightarrow$ dla każdego $x$ ( $x \in A \Rightarrow x \in B$ )
<u>Równość zbiorów</u> $A = B$	Zbiory $A$ i $B$ są <u>równe</u> $\Leftrightarrow$ mają te same elementy		$A = B \Leftrightarrow$ dla każdego $x$ ( $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ )
<u>Zbiory rozłączne</u>	Zbiory $A$ i $B$ są <u>rozłączne</u> $\Leftrightarrow$ iloczyn tych zbiorów jest zbiorem pustym		$A \cap B = \emptyset$

### 1.17. Zbiory liczbowe

- a) zbiór liczb naturalnych :  $N = \{0,1,2,3,4,\dots\}$   
zbiór liczb naturalnych dodatnich:  $N_+ = \{1,2,3,4,\dots\}$
- b) zbiór liczb całkowitych:  $C = \{\dots -3,-2,-1,0,2,3,4,\dots\}$   
zbiór liczb całkowitych dodatnich:  $C_+ = N_+$   
zbiór liczb całkowitych ujemnych:  $C_- = \{\dots -3,-2,-1\}$
- c) zbiór liczb wymiernych:  $W$  – zbiór liczb, które można przedstawić w postaci ułamka  $\frac{p}{q}$ , gdzie  $p \in C; q \in C \setminus \{0\}$
- d) zbiór liczb niewymiernych :  $NW$  – zbiór liczb, które nie są liczbami wymiernymi
- e) zbiór liczb rzeczywistych:  $R$   
 $R = W \cup NW$
- f) związki między zbiorami liczbowymi

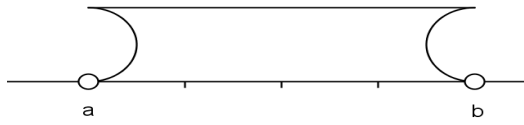
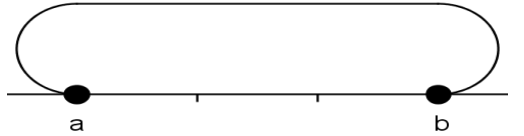
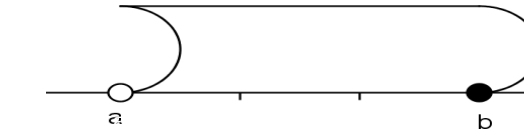
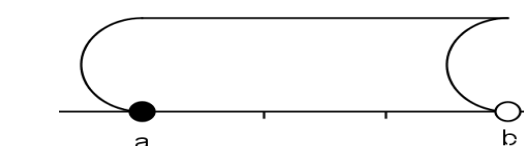
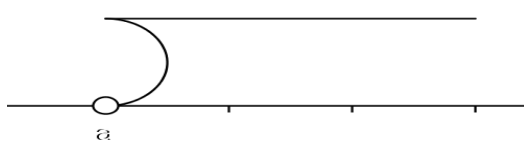
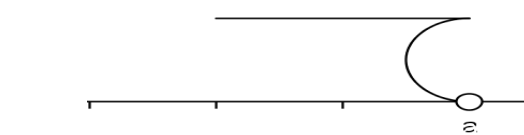
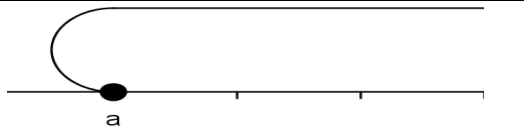


$$N \subset C \subset W \subset R$$

$$NW \subset R$$

$$W \cap NW = \emptyset$$

### 1.18. Przedziały liczbowe

Nazwa zbioru	Oznaczenie	Warunek, które spełniają liczby należące do zbioru	Ilustracja graficzna
Przedział otwarty	$(a, b)$	$a < x < b$	
Przedział domknięty	$\langle a, b \rangle$	$a \leq x \leq b$	
Przedział prawostronnie domknięty	$(a, b]$	$a < x \leq b$	
Przedział lewostronnie domknięty	$\langle a, b)$	$a \leq x < b$	
Przedziały nieograniczone otwarte	$(a, +\infty)$	$x > a$	
	$(-\infty, a)$	$x < a$	
Przedziały nieograniczone domknięte	$\langle a, +\infty)$	$x \geq a$	
	$(-\infty, a \rangle$	$x \leq a$	